Υποψήφιες <u>sos</u> ερωτήσεις προφορικών εξετάσεων, «Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι»

Δήμογλου Κωνσταντίνος

SOS Ερωτήσεις ανά Κεφάλαιο

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Κεφάλαιο 1. Περιγράψτε την κατασκευή του σώματος των μιγαδικών αριθμών. Πώς σκεφτήκαμε να ορίσουμε την πράξη γινομένου δύο μιγαδικών αριθμών; Υπάρχουν τοπολογικά, διαφορές ή ομοιότητες του $\mathbb{C}$ με τον $\mathbb{R}^2$; Τι παριστάνει (γεωμετρικά) το όρισμα και το πρωτεύον όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού; Σε έναν μιγαδικό αριθμό αντιστοιχούν άπειρα ορίσματα ή ένα και μοναδικό; Να βρείτε το πρωτεύον όρισμα των μιγαδικών αριθμών $z_1 = \sqrt{3} - i$ και $z_2 = -A$, όπου A ο αριθμός μητρώου σας. Μία εξίσωση της μορφής $z^A = 1 - 7i$, , όπου A ο αριθμός μητρώου σας, πόσες ρίζες έχει; Τι ορίζουμε ως z^λ, $\lambda \in \mathbb{C}$;

Κεφάλαιο 2. Να δώσετε τους ορισμούς πότε μια ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέμε ότι συγκλίνει σε κάποιο μιγαδικό αριθμό και πότε ότι αποκλίνει στο ∞. Να δώσετε τους αντίστοιχους ορισμούς για το πότε μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ συγκλίνει σε μιγαδικό αριθμό (αντίστοιχα στο ∞) όταν $z \to a \in \mathbb{C}$ και όταν $z \to \infty$ (αντίστοιχα όταν $z \to a \in \mathbb{C}$ και όταν $z \to \infty$). Υπάρχουν τα παρακάτω όρια; Και αν υπάρχουν υπολογίστε την τιμή τους (Όπου A παρακάτω θεωρείστε τον αριθμό μητρώου σας).

$$\lim_{z\to 0} \log z,\ \lim_{z\to\infty} \log z,\ \lim_{z\to\infty} e^z,\ \lim_{z\to 0} Arg z,\ \lim_{z\to\infty} |e^z|,\ \lim_{z\to 0} \frac{\sin|z|}{z},$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos|z|}{z},\ \lim_{z\to -A} Arg z,\ \lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z},\ \lim_{z\to 0} z Arg z$$

$$\lim_{n} \left(\sqrt{n} + i\frac{1}{n^2}\right),\ \lim_{n} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n,\ \lim_{n} \sqrt[n]{iA}$$

Είναι το πρωτεύον όρισμα συνεχής συνάρτηση στο $(-\infty, 0]$;

Κεφάλαιο 3. Να δώσετε τους ορισμούς διαφορισιμότητα μιγαδικής συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της, ολομορφίας και ακεραιότητας. Όταν λέμε το διανυσματικό πεδίο μίας μιγαδικής συνάρτησης τι εννοούμε; Διατυπώστε το θεώρημα των Cauchy-Riemann. Σας δίνεται ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο απο το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$. Μπορείτε πάντα να αντιστοιχήσετε στο δ.π αυτό μία μιγαδική συνάρτηση; Αν ναι, τότε αυτή η συνάρτηση είναι πάντα διαφορίσιμη; Αν δίνεται $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ μπορούμε να αποφανθούμε κατα πόσο η f είναι διαφορίσιμη ή όχι; Εξετάστε αν και που είναι μιγαδικά διαφορίσιμες οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$f_1(z) = \lambda z + b,\ f_2(z) = \lambda\overline{z} + b,\ \lambda, b \in \mathbb{C},\ f_3(z) = z^2\overline{z} - z^{10},\ f_4(z) = iz^2 - \overline{z}$$

Κεφάλαιο 4. Απαντήστε αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{3}\right)^n$ συγκλινουν (και σε ποιον αριθμό) ή αποκλίνουν. Έστω ότι σας δίνεται μία δυναμοσειρά κέντρου 0 η οποία συγκλίνει στο $z_0 = i + i$. Τότε, η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $z_1 = \frac{1}{2}$ ή αντίστοιχα στο $z_2 = \frac{1}{2}$; Πως ορίζεται η ακτίνα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς; Έστω ότι σας δίνεται μία δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R \in (0, +\infty]$, τότε είναι πάντα ολόμορφη στο πεδίο σύγκλισής της; Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται αναλυτική; Αν μια συνάρτηση είναι αναλυτική είναι και ολόμορφη; Αν μια συνάρτηση είναι αναλυτική τότε το διανυσματικό της πεδίο είναι απειρες φορές συνεχώς διαφορίσιμο; Ποιο το ανάπτυγμα της e^z, γύρω από το σημείο $2A\pi i$ όπου A ο αριθμός μητρώου σας; Ποιο το ανάπτυγμα της $\sin z$ γύρω από το σημείο 2π;

Κεφάλαιο 5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{[z_1,z_2]} z dz$ όπου $z_1 = -1-i$ και $z_2 = -1+i$. Σας δίνονται οι λέξεις ακέραια συνάρτηση και αναλυτική συνάρτηση, Υπάρχει κάποια σύνδεση μεταξύ τους; Είναι αμφιμονοσήμαντη η σύνδεση αυτή ή μονόπλευρη; (Έχοντας απαντήσει ότι οι δύο αυτές έννοιες είναι ταυτόσιμες συνεχίσουμε στην επόμενη ερώτηση) Αφού λοιπόν μία ακέραια συνάρτηση είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$ τότε θα μπορούμε να τη γράψουμε σαν δυναμοσειρά γύρω από κάθε σημείο στο $\mathbb{C}$. Υπάρχει κάποιος περιορισμός για την ακτίνα σύγλισης R; Οι συντελεστές του αναπτύγματος της f σαν δυναμοσειρά Taylor (πχ γύρω από το 0) είναι κάποιας συγκεκριμένης μορφής; Αν τώρα αλλάξουμε το πεδίο ολομορφίας της f από $\mathbb{C}$ σε ένα τόπος D αλλάζει κάτι στα προηγούμενα; (όχι) Μπορεί αλλαγή στην ακτίνα σύγκλισης της της f στο D να επιφέρει κάποια αλλαγή στο ανάπτυγμα της f; Σωστό ή λάθος: Σε κάθε ολόμορφη (ή ακέραια) συνάρτηση αντιστοιχεί ένα άπειρες φορές συνεχώς διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο.
Άλλη ερώτηση: Θεωρήστε τώρα ότι σας δίνεται μία συνάρτηση f ακέραια για την οποία γνωρίζουμε τις τιμές της πάνω σε έναν κύκλο (πχ τον κύκλο $|z| = 5$). Μπορούμε να γνωρίζουμε τιμές της συνάρτησης f και στο εσωτερικό του κύκλου ή μας χρειάζεται κάποια επιπρόσθετη πληροφορία; Άλλη ερώτηση: Θεωρείστε ότι σας δίνεται μια ολόμορφη συνάρτηση f στο δίσκο $D(0,2)$ και γνωρίζετε επίσης ότι η f πάνω στους όρους της ακολουθίας $-\frac{i}{n}$ κάνει A, όπου A ο αριθμός μητρώου σας (αντίστοιχα κάνει $\frac{i}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ ή άλλη περίπτωση κάνει 3). Μπορούμε να ξέρουμε το γενικό τύπο της f στο $D(0,2)$; Αν τώρα ξέρουμε ότι για μία ακέραια μιγαδική συνάρτηση f ισχύει ότι $f(x) = e^x - 2$, $x \in (0,1)$ γίνεται να γνωρίζω την τιμή $f(2\pi i)$; Διατυπώστε το θεώρημα που χρησιμοποιήσατε (δηλαδή το θεώρημα μοναδικότητας ή ταύτισης). Αν στο θεώρημα αυτό παραλήψουμε την υπόθεση ότι το D είναι τόπος χαλάει κάτι;

Κεφάλαιο 6. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι Αληθείς ή Ψευδής (Παρακάτω όπου A είναι ο αριθμός μητρώου σας).

(i) Η $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$, μπορεί να επεκταθεί ολόμορφα πάνω σε όλο το $\mathbb{C}$

(ii) Η $f(z) = \dfrac{z^{A-1}}{\sin^A z}$, έχει στο 0 επουσιώδη ανωμαλία.

(iii) Η $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^A(z+i)}$, έχει στο $-i$ απλό πόλο.

(vi) Η $f(z) = \dfrac{1}{\cos(1/z)}$ έχει ουσιώδη ανωμαλία στο 0.